MATEMATIKA VA INFORMATIKA

matinfo.jspi.uz

MATHEMATICS AND INFORMATICS

МАТЕМАТИКА И ИНФОРМАТИКА

№2
2021

MUNDARIJA

МИНИМАЛЬНЫЕ ПОВЕРХНОСТИ ПОЛУЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА R_3^1.

к.ф.м.ф. Э. Курбонов.,

Джизакский политехнический институт

Ш. Файзуллаев.,

Джизакский государственный педагогический институт

С. Кувондиков.

Джизакский государственный педагогический институт

Магестрант 2 курса

Аннотация: В данной работе изучена минимальные поверхности полуевклидова пространства R_3^1. Доказано, что циклические поверхности являются минимальными поверхностями галилеевой поверхности.

Ключовие слова: галилеевой поверхности, минимальные поверхности, особой плоскости, седловыми поверхностями, наложенного пространства, средняя кривизна.

Известно [1], что в евклидовом пространстве минимальные поверхности определяются как поверхности с нулевой средней кривизной. Эти поверхности имеют наименьшую площадь среди поверхностей с общими краями, которые являются заданным замкнутым контуром.

Минимальные поверхности галилеева пространства так же, как в евклидовом пространстве, определяем как поверхность средней кривизны, которая обращается в нуль. Тогда имеем $N=0$.

Легко доказать, что поверхность с нулевой средней кривизной в R_3^1 обладает свойством минимальной поверхности в R_3^1.

Площадь минимальной поверхности будет наименьшей среди поверхностей с общим краем в R_3^1.

Действительно, предположим, что $D-$выпуклая область на плоскости общего положения (т.е. $z=0$) и $\alpha-$граница этой области. Рассмотрим пространственную кривую $\overline{\alpha}$, взаимно однозначно проектирующуюся на α. Площадь поверхности Φ, однозначно проектирующаяся на область D с краем $\overline{\alpha}$, вычисляется по формуле

$$S=\iint_D \sqrt{G(u,v)}dudv,$$

где $G(u,v)$- коэффициент первой квадратичной формы поверхности Φ . Так как область $D-$выпуклая, двойной интеграл можно вычислить с помощью повторных интегралов, т.е.

$$S=\iint_D \sqrt{G(u,v)}dudv=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)}\sqrt{G(u,v)}dv\right]du\,.$$

Выражение $\int_{\varphi_1(a)}^{\varphi_2(a)}\sqrt{G(u,v)}dv$ - на плоскости $x=u=const$ дает длину дуги кривой γ, образованной пересечением особой плоскости с заданной поверхностью [2].

Следовательно, площадь поверхности прямо пропорционально длине дуги кривой γ; так как край поверхности $\overline{\alpha}$ имеет только две общие точки с плоскостью $x=const$, то длина кривой $\overline{\alpha}$, соединяющим эти точки, будет наименьшей тогда, когда $\overline{\alpha}$ является отрезком, соединяющим эти точки. Кроме того, коэффициент N пропорционален кривизне кривой γ. Равенство нулю N означает, что γ является отрезком.

Значит, минимальность площади достигается только в этом случае. Отсюда можно сделать следующее утверждение.

Утверждение. Циклические поверхности являются минимальными поверхностями галилеевой поверхности.

Известно, что минимальные поверхности являются седловыми поверхностями евклидова пространства [3]. Седловые поверхности – поверхности с отрицательной полной кривизной. Но в галилеевом пространстве поверхности с отрицательной полной кривизной разделяются на две класса: седловые и циклические. Установлен лишь факт, что циклические поверхности являются минимальными поверхностями галилеева пространства. Циклические поверхности являются подклассом поверхностей с отрицательной полной кривизной.

Аналогия циклической поверхности седловым поверхностям евклидова пространства позволяет поставить следующую задачу.

Задача. Найти условие, когда циклическая поверхность галилеева пространства является минимальной поверхностью евклидова пространства. При рассмотрении этого вопроса воспользуемся методом наложенного пространства, т.е. поверхность рассмотрим одновременно в галилеевом и евклидовом пространствах.

Для удобства рассмотрим только поверхность F галилеева пространства, однозначно проектирующуюся на плоскость общего положения.

Пусть поверхность F задана уравнением

$$z = f(x,y),(x,y) \in D \subset (xOy).$$

Тогда средняя кривизна F, рассматриваемой как поверхность в евклидовом пространстве, вычисляется по формуле:

$$2H = \frac{\begin{vmatrix} F_{yy} & F_{yz} & F_y \\ F_{yz} & F_{zz} & F_2 \\ F_y & F_x & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xz} & F_x \\ F_{xz} & F_{zz} & F_z \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}}{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \qquad (1)$$

В нашем случае $F(x,y,z) = z(x,y) - z = 0.$

Учитывая линейчатость поверхности, имеем:

$$F_{yy} = 0,\ F_{yz} = 0,\ F_y = z_y,\ F_{zz} = 0,\ F_z = -1,\ F_x = z_x,$$

$$F_{xx} = z_{xx},\ F_{xz} = 0,\ F_{xy} = z_{xy}.$$

Подставляя полученные производные в формулу (1) и приравнивая к нулю среднюю кривизну, получим

$$\frac{z_{xx}}{2z_x} = \frac{z_{xy}}{z_y - 1}$$

$$\frac{1}{2}\ln z_x = \ln(z_y - 1) + \ln c, \quad c \in R$$

$$z_y = c_1\sqrt{z_x} + 1, \quad где \quad c_1 = \frac{1}{c}$$

$$c_1\sqrt{z_x} - z_y + 1 = 0. \qquad (2)$$

Следовательно, при выполнении условия (2) циклической поверхности галилеева пространства соответствует минимальная поверхность евклидова пространства.

Значит, что на не омбилической точке поверхности евклидова и галилеева пространства совпадают.

Литературы.

[1]. Бакельман И.Я., Вернер А.Л., Кантор Б.Е. Введение в дифференциальную геометрию в целом. М., 1973. 440ст.

[2]. А. Артыкбаев., Д.Д. Соколов. Геометрия в целом в плоском пространстве-времени. Ташкент. “ФАН”. 1991. 177ст.

[3]. Э. К. Курбонов. Циклические поверхности галилеева пространства. // УзМЖ, 2000, №2, ст51-57.